「材料」(J. Soc. Mat. Sci., Japan), Vol. 49, No. 9, pp. 976-981, Sep. 2000
論　文

2個の介在物が周期配列をなす複合材料の縦弾性係数に及ぼす介在物の配置の影響
―介在物が近付いたときの影響―†

野田尚昭* 西谷弘信** 高瀬康*** 和田高志***

Effect of Arrangement of Inclusions on the Effective Elastic Modulus of a Composite which Has Two Groups of Periodically Arranged Inclusions

by

Nao-Aki NODA*, Hironobu NISITANI**, Yasushi TAKASE*** and Takashi WADA***

In this paper, the effect of arrangement of inclusions on the effective elastic modulus of composite materials is considered through examining a model, which has two groups of periodically arranged inclusions in a matrix. Here, two groups of inclusions A and B are considered, both having equally shaped equally arranged inclusions, which have the same elastic constant but different from the one of the matrix. Then, the position of group A is fixed and the effect of location of group B on the effective elastic modulus is considered by the application of FEM. The FEM analysis indicates that the effective elastic modulus is almost independent of the location of group B when the projected areas of inclusions of groups A and B are not overlapped. In other words, the volume fraction of inclusion and projected area fraction of inclusions are two major parameters controlling the effective elastic modulus of composites.

Key words **:** Elasticity, Law of mixture, Composite material, Finite element method, Micromechanics, Effective elastic modulus

1 緒　　言

異なる材料からなる複合材料の平均的な性質を，その構成材料（母材と介在物）の性質等から予測する問題は古くから多くの研究者によって取り扱われている.[1)~9)] 実際の複合材料の繊維や介在物は Fig. 1 (a), (b) に示すように不規則に分布する場合がほとんどであるが，それらの複合材料の機械的性質を直接議論するかわりに，Fig. 1 (c), (d) に示すように正方配列[10)~16)]や六方配列[13),15),17),18)]にモデル化して解析することはよく行われている．しかし，実際の複合材料においては，介在物はある程度不規則な配列をしているため，最近では均質化法[19)~26)]を用いて，このような介在物が不規則に分布することの検討もなされている.[24)] このような取り扱いは実際の複合材料の評価には有効であるが，一旦配列が異なると，その縦弾性係数等がどのように変化するか不明であるため，それぞれの配列ごとに解析が必要になる．すなわち，配列が不規則であることの影響を，より基本的な正方配列や六方配列モデルと比較するなどして，力学的に評価するような基本的取扱いは，著者らの知る限り見当たらないようである．

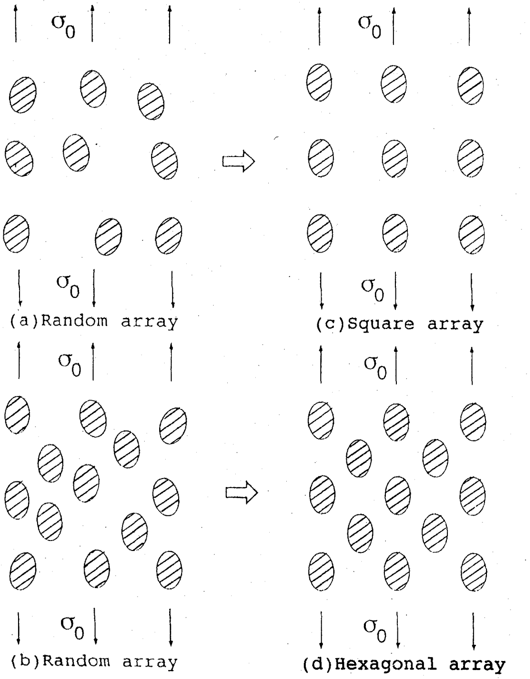

Fig. 1. Periodic arrangement of elliptical inclusions.

† 原稿受理　平成11年12月27日　Received Dec. 27, 1999
* 正会員　九州工業大学工学部機械知能工学科　〒804-8550　北九州市戸畑区仙水町，Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550
** 正会員　九州産業大学工学部機械工学科　〒813-0004　福岡市東区松香台，Dept. of Mech. Eng., Kyushu Sangyo Univ., Higashi-ku, Fukuoka, 813-0004
*** 九州工業大学工学部機械知能工学科　〒804-8550　北九州市戸畑区仙水町，Dept. of Mech. Eng., Kyushu Inst. of Tech., Tobata-ku, Kitakyushu, 804-8550

そこで，本研究では，実際の複合材料中に存在する介在物の配置の影響を検討するため，Fig. 2に示すような2個の介在物が周期配列をなすモデルを解析する．このモデルでは，周期的な介在物配列A以外に，同一形状・寸法の介在物を同一の周期で加えた介在物配列Bも同時に考える．そして，介在物の配列Aと配列Bの相対位置を可能な範囲［Fig. 2に示すGroup Bの位置ベクトルが$(0 \leqq x \leqq l_x/2,\ 0 \leqq y \leqq l_y/2)$の範囲］で変化させた場合の弾性定数を解析し，介在物の配列が弾性定数に与える影響について考察する．このモデルは，特別な場合に，Fig. 2(b), (d)に示すような長方形配列やFig. 2(c)に示すような六方配列をも含んでいる．また，Group BがGroup Aの上方向に接近して存在する場合には，平均的な縦弾性係数Eは干渉効果により大きくなるが，Fig. 2のモデルはその場合も含んでいる．ユニットセルモデルをFEM解析する際，可能であればできるだけ単純化したモデルを解析することが望ましい．そこで，本論文ではこのような観点から，介在物の配置にかかわらず縦弾性係数がほぼ等しくなる条件を考察する．

2　介在物の形状の影響について

本研究では介在物形状を長方形とするが長方形介在物モデルは強化繊維の2次元モデルとしても重要であり，著者らも最近，2個の長方形介在物角部の特異応力場の強さの干渉効果を体積力法の特異積分方程式を厳密に解析し考察している.[27] 本論文ではFig. 2のモデルを，まず，その平均的縦弾性係数に注目して，有限要素法によって考察する．長方形介在物の問題は，領域の要素分割が容易であるため，有限要素法は一つの有力な手法である．また長方形介在物の結果は以下に示すように他の介在物形状にも有効である．

著者ら[16]はさきに長方形介在物が周期的に配列されている場合（長方形配列）を有限要素法を用いて行い弾性定数の変化を系統的に求めた．そして，Fig. 3に示すように長方形介在物の結果をだ円形介在物の周期配列の結果[14), 15)]と比較して，介在物の形状・寸法が複合材料の弾性定数に及ぼす影響について考察した．Fig. 4はその結論を示している．すなわち，以下の条件を満足すれば異なる形状の介在物を含む複合材料の弾性定数はほぼ等しいことがわかる．

(1)　介在物の荷重軸方向の投影面積率が等しいこと．

(2)　介在物の体積率が等しいこと．

多くの実際の複合材料の介在物や繊維の断面はだ円で近似できるが，Fig. 3に示すように，そのだ円形介在物は(1)，(2)の条件を満足する長方形介在物で置き換えることができる．よって本論文で述べる議論はだ円で近似される他の介在物形状に対しても有効である．

3　具体的な解析手順

長方形介在物が不規則に配列している問題についてFig. 2に示すようなモデルを考え，その弾性特性を有限要素法を用いて解析する．その解析手順を以下に示す．

有限要素法で解析するためにFig. 2からFig. 5 (a)に示すようなunit cellを取出し，次のように解析する．まず問題をunit cellとみなしたときの境界条件は，以下のように表される．以下でu，vはそれぞれx，y方向の変位である．

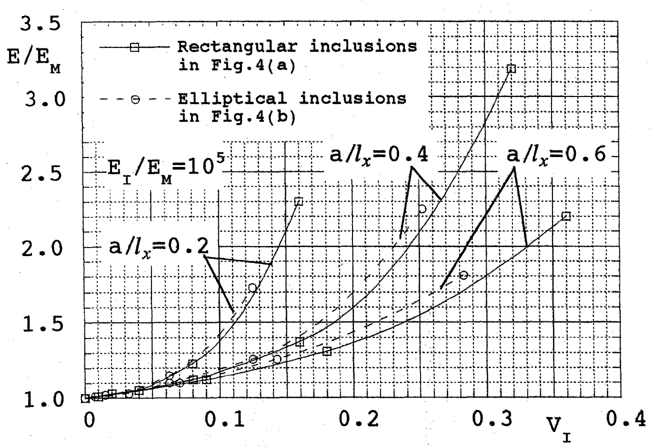

Fig. 3.　E/E_M vs. V_I relation in Fig. 4[15)].

［E_I : *Elastic modulus of inclusions A and B*
E_M : *Elastic modulus of matrix*］

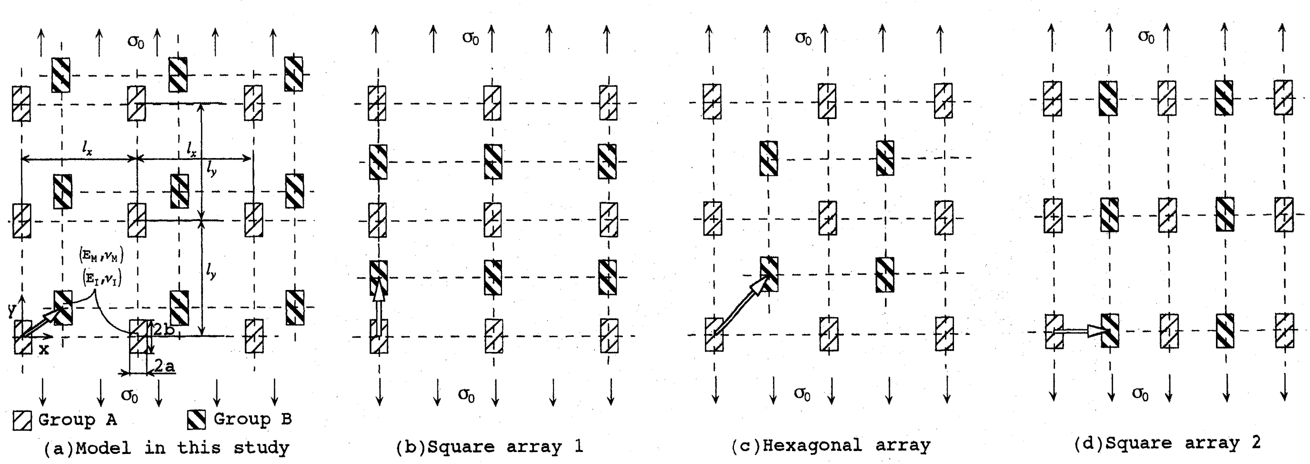

Fig. 2.　Problem.

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{I})\quad x=0 \text{で} 0 \leqq y \leqq l_y \text{　のとき} \\
u=u_1(y),\, v=v_1(y) \text{とすると} \\
x=l_x \text{で　} 0 \leqq y \leqq l_y \text{　のとき} \\
u=u_1(y)+u_0,\, v=v_1(y)
\end{array}
\right\} \tag{1}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{II})\quad y=0 \text{で　} 0 \leqq x \leqq l_x \text{　のとき} \\
u=u_2(x),\, v=v_2(x) \text{　とすると} \\
y=l_y \text{で　} 0 \leqq x \leqq l_x \text{　のとき} \\
u=u_2(x),\, v=v_2(x)+v_0
\end{array}
\right\} \tag{2}
$$

$$
(\mathrm{III})\quad \int_0^{lx} \sigma_y\big|_{y=0,ly} dx = \sigma_0 \times l_x,\ \int_0^{ly} \sigma_x\big|_{x=0,lx} dy = 0 \tag{3}
$$

u_0，v_0 は未知であるので以下に示す方法を用いる．はじめに Fig. 5 (b)に示すような境界条件を与えて FEM で解析する．

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{I})\quad x=0 \text{で} 0 \leqq y \leqq l_y, \text{および} \\
x=l_x \text{で} 0 \leqq y \leqq l_y \text{のとき} \\
u=u_1(y),\quad v=v_1(y)
\end{array}
\right\} \tag{4}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{II})\quad y=0 \text{で} 0 \leqq x \leqq l_x, \text{　のとき} \\
u=u_2(x),\quad v=v_2(x) \text{とすると} \\
y=l_y \text{で} 0 \leqq x \leqq l_x \text{　のとき} \\
u=u_2(x),\quad v=v_2(x)+c_1
\end{array}
\right\} \tag{5}
$$

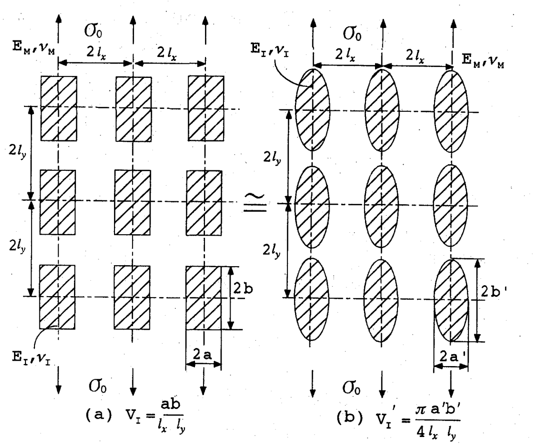

Fig. 4. Elastic modulus is almost equal when. (1) $a=a'$ and (2) $ab=\pi a'b'/4$.

ここで C_1 は適当に与えた定数である（C_1 の値は結果に無関係であるが，計算上 $C_1 = 0.01 l_y$ とした）．式 (4)，(5) のような境界条件は汎用有限要素法プログラムに用意されている適当な方法により与えることができる．式 (4)，(5) の境界条件のもとで FEM で解析したとき境界 $x=0$，l_x で $0 \leqq y \leqq l_y$ のとき得られる x 方向の合力を F_1，境界 $y=0$，l_y で $0 \leqq x \leqq l_y$ のとき得られる y 方向の合力を F_2 とする．

$$
(\mathrm{III})\quad \int_0^{ly} \sigma_x\big|_{x=0,lx} dy = F_1,\quad \int_0^{lx} \sigma_y\big|_{y=0,ly} dx = F_2 \tag{6}
$$

次に Fig. 5 (c) に示すような境界条件を与えて FEM で解析する．

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{I})\quad x=0 \text{で} 0 \leqq y \leqq l_y \text{　のとき} \\
u=u_1(y),\quad v=v_1(y) \text{とすると} \\
x=l_x \text{で} 0 \leqq y \leqq l_y \text{　のとき} \\
u=u_1(y)+c_1,\quad v=v_1(y)
\end{array}
\right\} \tag{7}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
(\mathrm{II})\quad y=0 \text{で} 0 \leqq x \leqq l_x, \text{および} \\
y=l_y \text{で} 0 \leqq x \leqq l_x \text{　のとき} \\
u=u_2(x),\quad v=v_2(x)
\end{array}
\right\} \tag{8}
$$

式 (7)，(8)の境界条件のもとで FEM で解析したとき境界 $x=0$，l_y で $0 \leqq y \leqq l_y$ のとき得られる x 方向の合力を F_3，境界 $y=0$，l_y で $0 \leqq x \leqq l_x$ のとき得られる y 方向の合力を F_4 とする．

$$
(\mathrm{III})\quad \int_0^{ly} \sigma_x\big|_{x=0,lx} dy = F_3,\quad \int_0^{lx} \sigma_y\big|_{y=0,ly} dx = F_4 \tag{9}
$$

以上より Fig. 5(a) の解を（σ_a，u_a），Fig. 5 (b) の解を（σ_b，u_b），Fig. 5 (c) の解を（σ_c，u_c）とするとき

$$
\left.
\begin{array}{l}
\sigma_a = C_A \sigma_b + C_B \sigma_c,\quad u_a = C_A u_b + C_B u_c \\
C_A = \dfrac{\sigma_0 l_x}{F_2 - F_4(F_1/F_3),}\quad C_B = \dfrac{(F_1/F_3)\sigma_0 l_x}{F_2 - F_4(F_1/F_3)}
\end{array}
\right\} \tag{10}
$$

ここで，C_A，C_B は

$$
\left.
\begin{array}{l}
C_A \times F_1 + C_B \times F_3 = 0 \\
C_A \times F_2 + C_B \times F_4 = \sigma_0 l_x
\end{array}
\right\} \tag{11}
$$

が成立するように決められた定数である．Fig. 5 (a)および式 (1)，(2)に示される変位 u_0，v_0 は，以下のように示される．

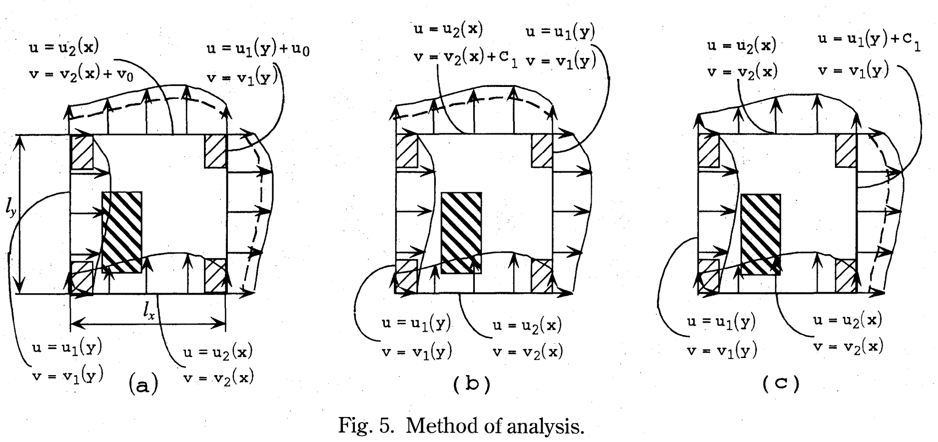

Fig. 5. Method of analysis.

$$u_0 = C_B c_1, \quad v_0 = C_A c_1 \tag{12}$$

以上示したような手順によって，Fig. 2 に示すような複合材料のみかけの弾性定数 E_y が以下のように与えられる．

$$\left.\begin{aligned} E_y &= \frac{\sigma_0}{(v_0/l_y)} = \frac{\{F_2 - F_4(F_1/F_3)\}/l_x}{C_1/l_y} \\ v_y &= \frac{u_0/l_x}{v_0/l_y} = \frac{F_3 l_y}{F_1 l_x} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

4 解析結果および考察

解析には四辺形4節点要素を用いて行い，要素分割は全ての介在物で要素数400，節点数441で解析した．ここで，E_I は介在物，E_M は母材の弾性定数であり，介在物の体積率 V_I は unit cell の寸法 $l_x \times l_y = 1 \times 1$ とすると全ての介在物で，$V_I = 8ab$ である．また，$E_I/E_M = 10^5$ として，ポアソン比は母材と介在物の両方で $\nu_I = \nu_M = 0.3$ とした．Fig. 6 に解析した3種類のモデル(1)～(3)を示す．Fig. 6 において介在物 A を固定して介在物 B の中心座標を $0 \leqq x \leqq l_x/2$，$0 \leqq y \leqq l_y/2$ の範囲で変化させたときの全体の巨視的弾性定数 E/E_M を計算する．ここで，E は y 方向の縦弾性係数 E_y（式(13)）である．

Table Ⅰ～Ⅲは上述の方法で解析した弾性定数の配列による変化を表にしたものである．Table Ⅰ～Ⅲより介在物 B がⒶの位置にある場合［千鳥分布配列 (Fig. 6)］と，介在物 B がⒷの位置にある場合［長方形配列 (Fig. 6)］を比較した．ここでモデル (1) を例にとると，Ⓐの時 $E/E_M = 1.157$，Ⓑの時 $E/E_M = 1.170$ である．このように，モデル (1)～(3) のⒶの位置にある場合とⒷの位置にある場合での E/E_M に大きな変化は見られない．

Fig. 7～9 は Table Ⅰ～Ⅲを図示したものである．Fig. 7～9 では，移動させた介在物Bの中心の座標をX-Y 軸に取り，Z 軸に E/E_M の値を取った．ここでモデル (1) を例にとるとⒸの時 $E/E_M = 1.233$，Ⓓの時 $E/E_M = 1.141$ である．このように Fig. 7～9 より介在物の形状・寸法が異なっても介在物Bが引張方向に対して直線上に並び，なおかつ接している時（Ⓒの位置にある場合）に最大値をとり，介在物Bが引張方向に対して垂直方向に並んで接している時（Ⓓの位置にある場合），最小値をとる．

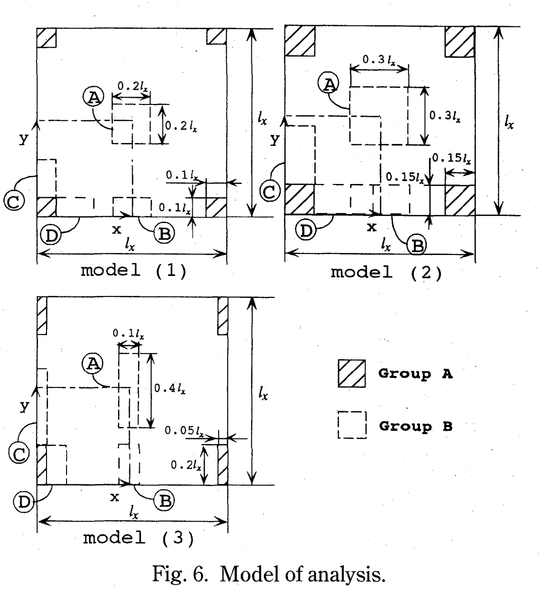

Fig. 6. Model of analysis.

Table Ⅰ. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model(1) ($b/a = 1$, $ab/l_x l_y = 0.08$, $E_I/E_M = 10^5$).

y/l_x \ x/l_x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.5	1.194	1.189	1.176	1.164	1.157	1.157 Ⓐ
0.4	1.200	1.191	1.177	1.165	1.159	1.157
0.3	1.209	1.198	1.177	1.162	1.159	1.159
0.2	1.233 Ⓒ	1.219	1.200	1.160	1.161	1.162
0.1			1.155	1.161	1.166	1.167
0			Ⓓ 1.141	1.163	1.169	1.170 Ⓑ

Table Ⅱ. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model (2) ($b/a = 1$, $ab/l_x l_y = 0.18$, $E_I/E_M = 10^5$).

y/l_x \ x/l_x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.5	1.615	1.586	1.505	1.432	1.388	1.375 Ⓐ
0.4	1.615	1.574	1.513	1.437	1.387	1.375
0.3	1.692 Ⓒ	1.656	1.590	1.530	1.386	1.379
0.2				1.426	1.390	1.391
0.1				1.373	1.395	1.411
0				Ⓓ 1.354	1.398	1.411 Ⓑ

Table Ⅲ. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model (3) ($b/a = 4$, $ab/l_x l_y = 0.08$, $E_I/E_M = 10^5$).

y/l_x \ x/l_x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.5	1.699	1.538	1.381	1.332	1.316	1.313 Ⓐ
0.4	1.893 Ⓒ	1.772	1.371	1.331	1.318	1.316
0.3		1.522	1.349	1.328	1.323	1.322
0.2		1.363	1.319	1.325	1.330	1.332
0.1		1.269	1.299	1.326	1.337	1.340
0		Ⓓ 1.233	1.294	1.327	1.339	1.343 Ⓑ

千鳥分布配列Ⓐを基準にした E/E_M の変化はモデル(1) で $E/E_M = 0.986$～1.066，モデル(2) で $E/E_M = 0.985$～1.231，モデル(3) で $E/E_M = 0.939$～1.442 である．つまり E/E_M の変化は体積率が大きいほど大きくなる傾向がある．

一方，介在物の荷重軸投影長さが重ならない範囲での千鳥分布配列Ⓐを基準にした E/E_M の変化はモデル (1) で $E/E_M = 0.986$～1.037，モデル (2) で $E/E_M = 0.985$～1.113，モデル (3) で $E/E_M = 0.939$～1.350 である．すなわち，介在物の荷重軸投影長さが重ならない範囲では介在物の配列の影響は小さく E/E_M はほぼ等しい (Fig. 10)．

結局，Fig. 6 のモデル (1)～(3) の FEM 解析結果より以下のことがわかる．

(1) 介在物A，Bの荷重軸投影面積が重ならない範囲では，複合材料の平均的弾性定数に対する介在物の配列の影響は比較的小さいこと．

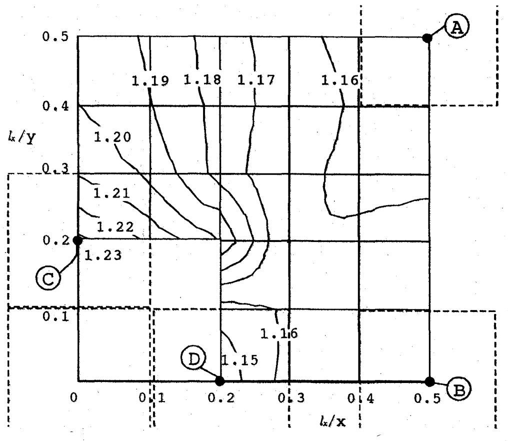

Fig. 7. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model (1) ($b/a=1$, $ab/l_xl_y=0.08$, $E_I/E_M=10^5$).

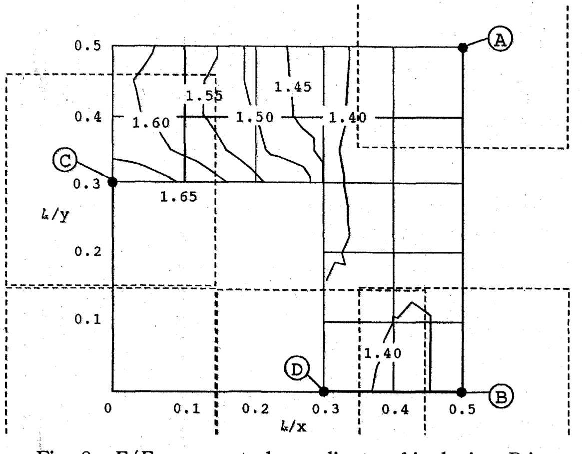

Fig. 8. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model (2) ($b/a=1$, $ab/l_xl_y=0.18$, $E_I/E_M=10^5$).

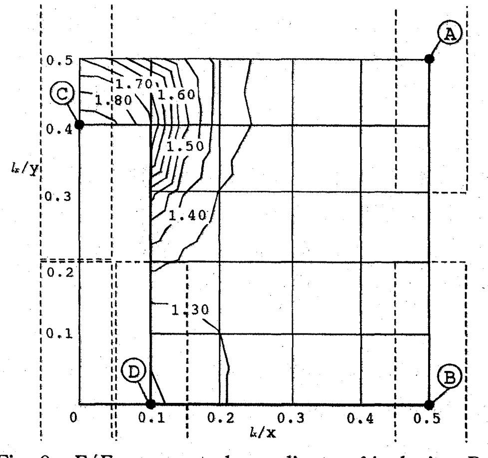

Fig. 9. E/E_M vs. central coordinate of inclusion B in model (3) ($b/a=4$, $ab/l_xl_y=0.08$, $E_I/E_M=10^5$).

(2)　Fig. 2 のモデルでは介在物の形状・寸法に関わらず介在物 A，B が引張方向に対して直線上に並びなおかつ接している時に最大値をとり，介在物が引張方向に対して垂直方向に並んで接している時に最小値をとること．

(3)　介在物の体積率が大きいほど千鳥分布配列を基準としたときの変化の割合が大きいこと．

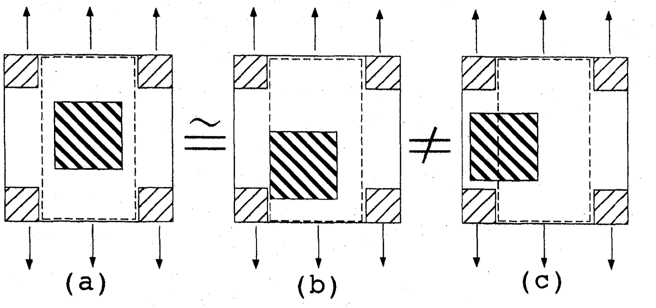

Fig. 10. Elastic modulus is almost equal in (a) and (b), but not equal to (c).

5　結　　　言

本研究では，実際の複合材料中に存在する介在物がある程度の不規則な配列をしていることの影響を，周期的に配列された介在物 (Group A) の母材中に，同一形状・寸法の介在物配列 (Group B) を同一な周期で加えたモデル (Fig. 2) を用いて考察した．その結果，介在物 A，B の荷重軸投影面積が重ならない範囲では，複合材料の平均的弾性定数に対する介在物の配列の影響は比較的小さいことがわかった．従って，Fig. 2 のモデルでも介在物の投影面積率と体積率が弾性定数をほぼ支配する 2 大パラメータであること[16]が確認された．

数値計算と研究のまとめを手伝って頂いた卒論学生の中矢慎太郎氏に深謝する．

参　考　文　献

1) J. C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism, Clarendon, Oxford, (1873)；L. Rayleigh, Philos. Mag., **34**, 481(1892)；A. Einstein, Ann. Phys., **19**, 289 (1906).
2) D. J. Bergman, Phys. Rep., **C-43**, 377 (1978).
3) G. W. Milton, J. Appl. Phys., **52**, 5294 (1981).
4) G. W. Milton and N. Phan-Thien, Proc. R. Soc. London Ser, A-**380**, 305 (1982).
5) S. Torquato, J. Chem. Phys., **84**, 6345 (1986).
6) G. W. Milton and R. V. Kohn, J. Mech. Phys. Solids, **36**, 597 (1988).
7) J. Rubinstein and S. Torquato, J. Fluid. Mech., **206**, 25 (1989).
8) G. W. Milton, J. Mech. Phys. Solids, **30**, 177 (1982).
9) S. Torquato and G. Stell, J. Chem. Phys., **82**, 980 (1985)；S. Torquato and F. Lado, J. Phys., A-**18**, 141 (1985)；S. Torquato, J. Status. Phys., **45**, 843 (1986)；S. Torquato, J. Chem. Phys., **85**, 4622 (1986)；N. A. Seaton and E. D. Glandt, ibid., **85**, 5262(1986)；S. Torquato, B. Lu and J. Rubinstein, Phys. Rev., A-**41**, 2059(1990)；G. Stell, in Lectures in Applied Mathematics, American Mathematical Society, **27**, (1991)；B. Lu and S. Torquato, Phys. Rev., A-**43**, 2078 (1991).
10) D. F. Adams and D. R. Doner, J. Compos. Mater., **1**, 152 (1967).

11) 山脇弘一，植村益次，東京大学宇宙航空研究所報告，**7**，315（1971）.
12) J. E. Flaherty and J. B. Keller, "Common Pure and Appl. Math.", **26**, 565 (1973) John Wiley & Sons.
13) 植村益次，山田直樹，材料，**24**，156（1975）.
14) 石田　誠，佐藤力男，日本機械学会論文集，A-**50**，1619（1984）.
15) 内山幸彦，八田正俊，村上敬宜，日本複合材料学会誌，A-**11**，275（1985）.
16) 野田尚昭，西谷弘信，高瀬　康，武内健一郎，日本機械学会論文集，A-**64**，1571（1998）.
17) C. H.Chen and S., Cheng, J. Compos. Mater., **1**, 30 (1967).
18) 石田　誠，井川秀信，日本機械学会論文集，A-**54**，1504（1988）.
19) A. Benssousan, J. L. Lions and G. Papanicolaou, Asymptotic "Analysis for Periodic Structures" (1978) North Holland, Amsterdam.
20) E. Sanchez-Palencia, "Lecture Note in Physics" (1980) Berlin, Springer.
21) I. Babuska, Computing Methods in Applied Sciences and Engineering, **134**, 137 (1976) Springer, Berlin.
22) 寺田賢二郎，弓削康平，菊池　昇，日本機械学会論文集，A-**61**，2199（1995）.
23) 京谷孝史，掘　宗朗，材料，**45**，465（1996）.
24) 寺田賢二郎，菊池　昇，日本機械学会論文集，A-**64**，162（1998）.
25) 岡田　裕，福井泰好，熊澤典良，丸山拓也，日本機械学会論文集，A-**64**，450（1998）.
26) 相澤龍彦，計算工学，**1**，204(1996)；高野直樹，座古勝，計算工学，**1**，212（1996）.
27) 野田尚昭，陳　夢成，高瀬　康，今橋智則，材料，**48**，1269（1999）.